

УДК 517.5

Салимов Р.Р. (Ин-т прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк)

О конечной липшицевости классов Орлича-Соболева

On finite lipschitz Orlicz Sobolev classes

Аннотация. Найдено достаточное условие конечной липшицевости гомеоморфизмов класса Орлича-Соболева $W_{loc}^{1,\varphi}$ при условии типа Кальдерона на φ .

It is found a sufficient condition of finite Lipschitz of homeomorphisms of the Orlicz-Sobolev class $W_{loc}^{1,\varphi}$ under a condition of the Calderon type.

1 Введение

Напомним некоторые определения. Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства кривых D в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_{\gamma} \rho(x) ds \geq 1 \quad (1.1)$$

для всех $\gamma \in \Gamma$. Пусть $p \geq 1$. Тогда p -модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x). \quad (1.2)$$

Здесь m обозначает меру Лебега в \mathbb{R}^n .

Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Предположим, что $n - 1 < p < n$ и

$$M_p(f\Gamma) \leq K M_p(\Gamma) \quad (1.3)$$

для произвольного семейства Γ кривых γ в области D . При предположении, что f в (1.3) является гомеоморфизмом, Герингом было установлено, что отображение f является *липшицевым*, другими словами, при некоторой постоянной $C > 0$ и всех $x_0 \in D$ справедлива оценка

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq K^{\frac{1}{n-p}}, \quad (1.4)$$

см., напр., теорему 2 в [1].

Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Напомним, что гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,1}$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K(x) \cdot J_f(x) \quad (1.5)$$

для некоторой почти всюду конечной функции $K(x) \geq 1$, где $f'(x)$ якоби-ева матрица f , $\|f'(x)\|$ – её операторная норма: $\|f'(x)\| = \sup_{|h|=1} |f'(x) \cdot h|$ и

$J_f(x) = \det f'(x)$ – якобиан отображения f .

Пусть $p \in (1, \infty)$. В дальнейшем, полагаем

$$K_p(x, f) = \begin{cases} \frac{\|f'(x)\|^p}{J(x, f)}, & \text{если } J(x, f) \neq 0 \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0 \\ \infty, & \text{в остальных точках.} \end{cases} \quad (1.6)$$

Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f \in W_{\text{loc}}^{1,2}$ в работе [2], см. также [3].

Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi(0) = 0$, обозначим символом L^φ пространство всех функций $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, таких что

$$\int_D \varphi \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right) dm(x) < \infty$$

при некотором $\lambda > 0$, см., напр., [4]. Здесь m – мера Лебега в \mathbb{R}^n . Пространство L^φ называется *пространством Орлича*.

Классом Орлича–Соболева $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f , заданных в D , с первыми обобщёнными производными по Соболеву, градиент ∇f которых принадлежит классу Орлича локально в области D . Если же, более того, ∇f принадлежит классу Орлича в области D , мы пишем $f \in W^{1,\varphi}(D)$. Заметим, что по определению $W_{\text{loc}}^{1,\varphi} \subset W_{\text{loc}}^{1,1}$. Как обычно, мы пишем $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$, если $\varphi(t) = t^p$, $p \geq 1$. Известно, что непрерывная функция f принадлежит классу $W_{\text{loc}}^{1,p}$ тогда и только тогда, когда $f \in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна

на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p в области D , см., напр., [5, разд. 1.1.3].

Далее, если f – локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных x_1, \dots, x_n , $f = (f_1, \dots, f_m)$, $f_i \in W_{\text{loc}}^{1,1}$, $i = 1, \dots, m$, и

$$\int_D \varphi(|\nabla f(x)|) \, dm(x) < \infty,$$

где $|\nabla f(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы снова пишем $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$. Мы также используем обозначение $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ в случае более общих функций φ , чем в классах Орлича, всегда предполагающих выпуклость функции φ и ее нормировку $\varphi(0) = 0$.

Отметим, что классы Орлича–Соболева сейчас, как и ранее, изучаются в самых различных аспектах многими авторами, см., напр., [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] и [22].

2 Свойства классов Орлича–Соболева

Теорема 2.1 Пусть Ω – открытое множество в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \quad (2.1)$$

Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω .

Замечание 2.1 В частности, заключение теоремы 2.1 имеет место, если $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}$ при некотором $p > n - 1$. Последнее утверждение – результат Вайсяля, см. лемму 3 в [23]. Теорема 2.1 является также распространением в пространство хорошо известной теоремы Менъшова–Геринга–Лехто на плоскости, см., напр., [24], [25] и [26].

Теорема 2.2 Пусть Ω – открытое множество в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi : (0, \infty) \rightarrow$

$(0, \infty)$ – неубывающая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \quad (2.2)$$

Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω .

Теорема 2.3 Пусть U – открытое множество в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая функция, такая что для некоторого $t_* \in (0, \infty)$

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \quad (2.3)$$

Тогда любое непрерывное отображение $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ обладает (N) -свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$ -мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях \mathcal{P} , параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости \mathcal{P}_0 . Кроме того, на почти всех таких \mathcal{P} , $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.

Заметим, что, если условие вида (2.3) имеет место для некоторой неубывающей функции φ , то функция $\varphi_c(t) = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (2.3). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях.

Следствие 2.1 При условии (2.3) любое непрерывное отображение $f \in W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ обладает (N) -свойством относительно $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.

3 Модули семейств поверхностей

Следуя [27, разд. 9.2, гл. 9], далее k -мерной поверхностью S в \mathbb{R}^n называется произвольное непрерывное отображение $S : \omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, где ω – открытое

множество в $\overline{\mathbb{R}^k} := \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ и $k = 1, \dots, n-1$. Функцией кратности поверхности S называется число прообразов

$$N(S, y) = \text{card } S^{-1}(y) = \text{card } \{x \in \omega : S(x) = y\}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Другими словами, символ $N(S, y)$ обозначает кратность накрытия точки y поверхностью S . Известно, что функция кратности является полунепрерывной снизу, и, значит, измерима относительно произвольной хаусдорфовой меры H^k , см., [27, разд. 9.2].

Для борелевской функции $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ ее *интеграл над поверхностью* S определяется равенством

$$\int_S \rho d\mathcal{A} := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(y) N(S, y) dH^k y. \quad (3.1)$$

Пусть Γ – семейство k -мерных поверхностей S . Борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ , пишут $\rho \in \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^k d\mathcal{A} \geq 1$$

для каждой поверхности $S \in \Gamma$. Пусть $p \in (1, \infty)$ – заданное фиксированное число. Тогда p -модулем семейства Γ называется величина

$$M_p(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) dm(x).$$

4 О емкости конденсатора

Следуя работе [28], пару $\mathcal{E} = (A, C)$, где $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество и C – непустое компактное множество, содержащееся в A , называем *конденсатором*. Конденсатор \mathcal{E} называется *кольцевым конденсатором*, если $G = A \setminus C$ – кольцо, т.е., если G – область, дополнение которой $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus G$ состоит в точности из двух компонент. Говорят также, что конденсатор $\mathcal{E} = (A, C)$ лежит в области D , если $A \subset D$. Очевидно, что если $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное, открытое отображение и $\mathcal{E} = (A, C)$ – конденсатор в D , то (fA, fC) также конденсатор в fD . Далее $f\mathcal{E} = (fA, fC)$.

Функция $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна на прямой, имеющей непустое пересечение с A , если она абсолютно непрерывна на любом отрезке этой прямой, заключенном в A . Функция $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу ACL (абсолютно непрерывна на почти всех прямых), если она абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси.

Обозначим через $C_0(A)$ множество непрерывных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ с компактным носителем, $W_0(\mathcal{E}) = W_0(A, C)$ – семейство неотрицательных функций $u : A \rightarrow \mathbb{R}^1$ таких, что 1) $u \in C_0(A)$, 2) $u(x) \geq 1$ для $x \in C$ и 3) u принадлежит классу ACL. Также обозначим

$$|\nabla u| = \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (4.1)$$

При $p \geq 1$ величину

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = \text{cap}_p(A, C) = \inf_{u \in W_0(\mathcal{E})} \int_A |\nabla u|^p dm(x) \quad (4.2)$$

называют p -ёмкостью конденсатора \mathcal{E} . В дальнейшем при $p > 1$ мы будем использовать равенство

$$\text{cap}_p \mathcal{E} = M_p(\Delta(\partial A, \partial C; A \setminus C)), \quad (4.3)$$

см. [29], [30] и [31].

Известно, что при $1 \leq p < n$

$$\text{cap}_p \mathcal{E} \geq n \nu_n^{\frac{p}{n}} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} [m(C)]^{\frac{n-p}{n}} \quad (4.4)$$

где ν_n – объем единичного шара в \mathbb{R}^n , см., напр., неравенство (8.9) в [32].

При $n-1 < p \leq n$ имеет место оценка

$$(\text{cap}_p \mathcal{E})^{n-1} \geq \gamma \frac{d(C)^p}{m(A)^{1-n+p}}, \quad (4.5)$$

где $d(C)$ – диаметр компакта C , γ – положительная константа, зависящая только от размерности n и p , см. предложение 6 в [33].

5 Нижние Q -гомеоморфизмы относительно p -модуля

Говорят, см. [27, разд. 9.2], что измеримая по Лебегу функция $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ является *обобщённо p -допустимой* для семейства Γ , состоящего из $(n - 1)$ -мерных поверхностей S в \mathbb{R}^n , пишут $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$, если

$$\int_S \rho^{n-1}(x) d\mathcal{A} \geq 1 \quad (5.1)$$

для p -почти всех $S \in \Gamma$.

В работе [34], разд. 13, Ф. Геринг определил K -квазиконформное отображение как гомеоморфизм, изменяющий модуль кольцевой области не более чем в K раз. Следующее понятие мотивировано кольцевым определением Геринга.

Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $x_0 \in D$, $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ измеримая по Лебегу функция. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ будем называть *нижним Q -гомеоморфизмом относительно p -модуля в точке x_0* , если

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon) \geq \inf_{\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Sigma_\varepsilon} \int_R \frac{\rho^p(x)}{Q(x)} dm(x) \quad (5.2)$$

для каждого кольца

$$R = R(x_0, \varepsilon, \varepsilon_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x - x_0| < \varepsilon_0\}, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0 \in (0, d_0),$$

где $d_0 = \text{dist}(x_0, \partial D)$, а Σ_ε обозначает семейство всех сфер

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad r \in (\varepsilon, \varepsilon_0). \quad (5.3)$$

Следующий критерий нижних Q -гомеоморфизмов, см. [39, Теорема 6.1], впервые был доказан при $p = n$ в работе [41], теорема 2.1, см. также монографию [27], теорема 9.2.

Лемма 5.1 Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $x_0 \in \overline{D}$, и пусть $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция. Гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ является *нижним Q -гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p -модуля при $p > n - 1$* тогда и только тогда, когда

$$M_p(f\Sigma_\varepsilon) \geq \int_\varepsilon^{\varepsilon_0} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 \in (0, d_0), \quad (5.4)$$

где $d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, Σ_ε – семейство всех пересечений сфер $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}$, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, с D , и

$$\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int_{D(x_0, r)} Q^{\frac{n-1}{p-n+1}}(x) d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}},$$

где $D(x_0, r) = \{x \in D : |x - x_0| = r\} = D \cap S(x_0, r)$. Инфимум в (5.2) достигается только для функции

$$\rho_0(x) = \frac{Q(x)}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(|x - x_0|)}. \quad (5.5)$$

Лемма 5.2 Пусть D – область в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, $x_0 \in D$, и пусть $Q : D \rightarrow (0, \infty)$ – измеримая функция и $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – нижний Q -гомеоморфизмом в точке x_0 относительно p -модуля при $p > n - 1$. Тогда имеет место оценка

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Delta(fS_1, fS_2, fD)) \leq \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\|Q\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}}, \quad (5.6)$$

где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Действительно, пусть $0 < r_1 < r_2 < d(x_0, \partial D)$ и $S_i = S(x_0, r_i)$, $i = 1, 2$. Согласно неравенствам Хессе и Цимера (см., напр., [40] и [43].),

$$M_{\frac{p}{p-n+1}}(f(\Delta(S_1, S_2, D))) \leq \frac{1}{M_p^{\frac{n-1}{p-n+1}}(f(\Sigma))}, \quad (5.7)$$

поскольку $f(\Sigma) \subset \Sigma(f(S_1), f(S_2), f(D))$, где Σ обозначает совокупность всех сфер с центром в точке x_0 , расположенных между сферами S_1 и S_2 , а $\Sigma(f(S_1), f(S_2), f(D))$ состоит из всех $(n-1)$ -мерных поверхностей в $f(D)$, отделяющих $f(S_1)$ и $f(S_2)$. Из соотношения (5.7) по лемме 5.1 вытекает заключение леммы 5.2.

6 Взаимосвязь нижних Q -гомеоморфизмов с классами Орлича-Соболева

Напомним, что отображение $g : X \rightarrow Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым*, если $\text{dist}(g(x_1), g(x_2)) \leq M \cdot \text{dist}(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех $x_1, x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \rightarrow Y$ *билипшицево*, если, оно, во-первых, липшицево, во-вторых, $M^* \cdot \text{dist}(x_1, x_2) \leq \text{dist}(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех $x_1, x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Теорема 6.1 Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $\varphi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ – неубывающая функция, такая что при $t_* \in (0, \infty)$

$$\int_{t_*}^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)} \right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \quad (6.1)$$

Тогда любой гомеоморфизм $f : D \rightarrow D'$ конечного искажения класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ является нижним $K_p(x, f)$ -гомеоморфизмом относительно p -модуля с $p > n - 1$.

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал и $J_f(x) = \det f'(x) \neq 0$. Заметим, что множество B представляет собой не более чем счётное объединение борелевских множеств B_l , $l = 1, 2, \dots$, таких что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., [38, лемма 3.2.2]. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По теореме 2.1 множество $B_0 := D \setminus (B \cup B_*)$ имеет меру Лебега нуль. Следовательно, по [27, теорема 9.1] имеем, что $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для p -почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$, где " p -почти всех" определяется в смысле p -модуля семейства поверхностей. Тогда, в силу [27, лемма 9.1], $H^{n-1}(B_0 \cap S_r) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$ и по

следствию 2.1 получаем, что $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех $r \in \mathbb{R}$, где $S_r^* = f(S_r)$.

Заметим, что также $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) = 0$ и $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) = 0$ для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ в смысле p -модуля семейства поверхностей. Действительно, пусть Γ_0 – подсемейство всех сфер $S_r := S(x_0, r)$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. Обозначим через R множество всех $r \in \mathbb{R}$, для которых либо $H^{n-1}(f(B_0) \cap S_r^*) > 0$, либо $H^{n-1}(f(B_*) \cap S_r^*) > 0$. В силу сказанного выше, $m_1(R) = 0$. Тогда по теореме Фубини $m(E) = 0$, где $E = \{x \in D : |x - x_0| = r \in R\}$. Функция $\rho_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$, определённая символом ∞ при $x \in E$ и равная нулю на оставшемся множестве обобщенно p -допустима для семейства Γ_0 . Таким образом, по (9.18) в [27] $M_p(\Gamma_0) \leq \int_E \rho_1^p dm(x) = 0$, т.е., действительно, $M_p(\Gamma_0) = 0$.

По теореме Кирсбрауна, см. [38, теорема 2.10.43], каждое отображение f_l может быть продолжено до липшицевского отображения $\tilde{f}_l : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое по теореме Радемахера–Степанова \tilde{f}_l дифференцируемо почти всюду в \mathbb{R}^n , см. [38, теорема 3.1.6]. В силу единственности аппроксимативного дифференциала (см. [38, пункт 3.1.2]), можно считать, что при всех $x \in B_l$ выполнено равенство $\tilde{f}_l'(x) = f'(x)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r , $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D . Для произвольной функции $\rho_* \in \text{adm } f(\Gamma)$, такой что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0 , и

$$\rho(x) := \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \quad \text{при } x \in D \setminus B_0 = B \cup B_*$$

Рассуждая покусочно на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$, согласно [38, разд. 1.7.6], а также используя геометрический смысл величины $\|f'(x)\|$ и её связь с якобианом отображения, см., напр., соотношения (2.5) и (2.6) гл. I § 2 в [42], имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{S_r} \rho^{n-1} d\mathcal{A} &= \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{A} = \\ &= \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{\|f'(x)\|^{n-1}}{\frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}}} \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} \geq \int_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \cdot \frac{d\mathcal{A}_*}{d\mathcal{A}} d\mathcal{A} = \end{aligned}$$

$$= \int_{S_r^*} \rho_*^{n-1}(y) d\mathcal{A}_* \geq 1$$

для почти всех S_r , и, следовательно, $\rho \in \text{ext}_p \text{adm } \Gamma$. Используя замену переменных на каждом B_l , $l = 1, 2, \dots$, см., напр., [38, теорема 3.2.5], ввиду счётной аддитивности интеграла, получаем также оценку

$$\int_D \frac{\rho^p(x)}{K_p(x, f)} dm(x) \leq \int_{f(D)} \rho_*^p(x) dm(x),$$

что и завершает доказательство.

Следствие 6.1 *Любой гомеоморфизм с конечным искажением в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, класса $W_{\text{loc}}^{1,\alpha}$ при $\alpha > n - 1$ является нижним $K_p(x, f)$ -гомеоморфизмом с $p > n - 1$.*

6.1 Конечная липшицевость классов Орлича-Соболева

Для непрерывного отображения $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, положим

$$L(x, f) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}. \quad (6.2)$$

Говорят, что отображение f является *конечно липшицевым*, если

$$L(x, f) < \infty$$

для всех $x \in D$.

Теорема 6.2 *Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Предположим, что $f : D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ с условием (6.1) и, кроме того, при $p \in (n, n + \frac{1}{n-2})$*

$$k_p(x_0) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{B(x_0, \varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} < \infty. \quad (6.3)$$

Тогда

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq c_{n,p} \cdot k_p^\gamma(x_0) < \infty, \quad (6.4)$$

где $\gamma = \frac{n-1}{n(p-n+1)-p}$ и $c_{n,p}$ – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Доказательство. Рассмотрим сферическое кольцо $R = R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ с $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$ такое, что $R(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset D$. Тогда $\mathcal{E} = \left(B(x_0, \varepsilon_2), \overline{B(x_0, \varepsilon_1)} \right)$ – кольцевой конденсатор в D и $f\mathcal{E} = \left(fB(x_0, \varepsilon_2), \overline{fB(x_0, \varepsilon_1)} \right)$ – кольцевой конденсатор в D' .

Пусть $\Gamma^* = \Delta(fS_1, fS_2, fR)$, где $S_j = S(x_0, r_j)$, $j = 1, 2$. Тогда согласно (4.3), имеем равенство

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E} = M_{\frac{p}{p-n+1}}(\Gamma^*) . \quad (6.5)$$

По лемме 5.2 получаем, что

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E} \leq \left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|K_p(x, f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} , \quad (6.6)$$

$$\text{где } \|K_p(x, f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r) = \left(\int_{S(x_0, r)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} d\mathcal{A} \right)^{\frac{p-n+1}{n-1}} .$$

Заметим, что

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \|K_p(x, f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}^{\frac{p}{p-n+1}}(r) \cdot \frac{dr}{\|K_p(x, f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}^{\frac{p}{p-n+1}}(r)} . \quad (6.7)$$

И применяя неравенство Гельдера с $q = \frac{p}{p-n+1}$ и $q' = \frac{p}{n-1}$ имеем

$$\left(\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{dr}{\|K_p(x, f)\|_{\frac{n-1}{p-n+1}}(r)} \right)^{-\frac{n-1}{p-n+1}} \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int_R [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) . \quad (6.8)$$

Комбинируя неравенства (6.8) и (6.6), получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} f\mathcal{E} \leq \frac{1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int_R [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) . \quad (6.9)$$

Далее, выбирая $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} (fB(x_0, 4\varepsilon), \overline{fB(x_0, 2\varepsilon)}) \leq \frac{1}{(2\varepsilon)^{\frac{p}{p-n+1}}} \int_{B(x_0, 4\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) . \quad (6.10)$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.4) вытекает оценка

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} (fB(x_0, 4\varepsilon), f\overline{B(x_0, 2\varepsilon)}) \geq c_1 [m(fB(x_0, 2\varepsilon))]^{\frac{n(p-n+1)-p}{n(p-n+1)}}, \quad (6.11)$$

где c_1 – положительная константа, зависящая только от размерности пространства n и p .

Комбинируя (6.10) и (6.11), получаем, что

$$\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \leq c_2 \left[\int_{B(x_0, 4\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) \right]^{\frac{n(p-n+1)}{n(p-n+1)-p}}, \quad (6.12)$$

где c_2 – положительная постоянная зависящая только от n и p .

Далее, выбирая в (6.9) $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 2\varepsilon$, получим

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} (fB(x_0, 2\varepsilon), f\overline{B(x_0, \varepsilon)}) \leq \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p}{p-n+1}}} \int_{B(x_0, 2\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x). \quad (6.13)$$

С другой стороны, в силу неравенства (4.5), получаем

$$\text{cap}_{\frac{p}{p-n+1}} (fB(x_0, 2\varepsilon), f\overline{B(x_0, \varepsilon)}) \geq \left(c_3 \frac{d^{\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0, \varepsilon))}{m^{1-n+\frac{p}{p-n+1}}(fB(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad (6.14)$$

где c_3 – положительная константа, зависящая только от n и p .

Комбинируя (6.13) и (6.14), получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} &\leq c_4 \left(\frac{m(fB(x_0, 2\varepsilon))}{m(B(x_0, 2\varepsilon))} \right)^{i_1} \times \\ &\times \left(\int_{B(x_0, 2\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) \right)^{i_2}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где

$$i_1 = \frac{(1-n)(p-n+1)+p}{p}, \quad i_2 = \frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_4 – положительная константа, зависящая только от n и p .

Эта оценка вместе с (6.12) дает неравенство

$$\frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq c_5 \left(\int_{B(x_0, 4\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) \right)^{j_1} \times$$

$$\times \left(\int_{B(x_0, 2\varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) \right)^{j_2}, \quad (6.16)$$

где

$$j_1 = \frac{n((1-n)(p-n+1)+p)(p-n+1)}{p(n(p-n+1)-p)}, \quad j_2 = \frac{(n-1)(p-n+1)}{p}$$

и c_5 – положительная константа, зависящая только от n и p .

Переходя к верхнему пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$L(x_0, f) = \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|} \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d(fB(x_0, \varepsilon))}{\varepsilon} \leq c \cdot [k_p(x_0)]^{\frac{n-1}{n(p-n+1)-p}},$$

где c – положительная постоянная, зависящая только от n и p .

Следствие 6.2 Пусть D и D' – области в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Предположим, что $f : D \rightarrow D'$ – гомеоморфизм с конечным искажением класса $W_{\text{loc}}^{1,\varphi}$ с условием (6.1) и, кроме того, при $p \in (n, n + \frac{1}{n-2})$

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) < \infty \quad \forall x_0 \in D. \quad (6.17)$$

Тогда гомеоморфизм f является конечно липшицевым.

Замечание. В соответствии с леммой 10.6 в [27] конечно липшицевые отображения обладают N -свойством относительно хаусдорфовых мер и, таким образом, являются абсолютно непрерывными на кривых и поверхностях.

Построим пример гомеоморфизма с конечным искажением, не являющегося конечно липшицевым.

Пример. Предположим, что $p \in (n, n + \frac{1}{n-2})$. Пусть $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$, где

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \left(1 + (p-n) \int_{|x|}^1 \frac{dt}{t^{p-n+1} \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{t})} \right)^{-\frac{1}{p-n}}$$

при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

Касательная и радиальная дилатации f на сфере $|x| = r$, $r \in (0, 1)$, легко вычисляются:

$$\delta_T = \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{\left(1 + (p-n) \int_r^1 \frac{dt}{t^{p-n+1} \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{1}{p-n}}}{r}$$

и

$$\delta_r = \frac{\left(1 + (p-n) \int_r^1 \frac{dt}{t^{p-n+1} \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{t})}\right)^{-\frac{p-n+1}{p-n}}}{r^{p-n+1} \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{r})}.$$

Заметим, что $\delta_T \geq \delta_r$ и

$$\delta_T^{p-n+1} = \delta_r \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{r}).$$

Следовательно, ввиду сферической симметрии мы видим, что

$$K_p(x, f) = \frac{\delta_T^p}{\delta_T^{n-1} \delta_r} = \frac{\delta_T^{p-n+1}}{\delta_r} = \ln^{\frac{p-n+1}{n-1}}(\frac{e}{|x|}).$$

Заметим, что

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(x_0, \varepsilon)} [K_p(x, f)]^{\frac{n-1}{p-n+1}} dm(x) = \infty. \quad (6.18)$$

Тем не менее, как легко проверить по правилу Лопиталя, $\frac{|f(x)|}{|x|} \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, т.е. гомеоморфизм f не является липшицевым в нуле.

Список литературы

- [1] *Gehring F.W.* Lipschitz mappings and the p -capacity of ring in n -space // Advances in the theory of Riemann surfaces (Proc. Conf. Stonybrook, N.Y., 1969), Ann. of Math. Studies. – 1971. – **66**. – P. 175–193.
- [2] *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – **118**. – P. 181–188.
- [3] *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [4] *Красносельский М.А., Рутницкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958.

- [5] *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева. – ЛГУ, Ленинград, 1985. – 416 с.
- [6] *Афанасьева Е.С., Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Об отображениях в классах Орлича–Соболева на римановых многообразиях // Укр. матем. вісник. – 2011. – **8**, № 3. – С. 319–342.
- [7] *Alberico A., Cianchi A.* Differentiability properties of Orlicz-Sobolev functions // Ark. Mat. – 2005. – **43**. – P. 1–28.
- [8] *Calderon A.P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. – **2**. – С. 203–213.
- [9] *Cianchi A.* A sharp embedding theorem for Orlicz-Sobolev spaces // Indiana Univ. Math. J. – 1996. – **45**, no. 1. – P. 39–65.
- [10] *Donaldson T.* Nonlinear elliptic boundary-value problems in Orlicz-Sobolev spaces // J. Diff. Eq. – 1971. – **10**. – P. 507–528.
- [11] *Gossez J.-P., Mustonen V.* Variational inequalities in Orlicz-Sobolev spaces // Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. – 1987. – **11**. – P. 379–392.
- [12] *Hsini M.* Existence of solutions to a semilinear elliptic system through generalized Orlicz-Sobolev spaces // J. Partial Differ. Equ. – 2010. – **23**, no. 2. – P. 168–193.
- [13] *Iwaniec T., Koskela P., Onninen J.* Mappings of finite distortion: Compactness // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 2002. – **27**, no. 2. – P. 391–417.
- [14] *Kovtonyuk D.A., Ryazanov V.I., Salimov R.R., Sevost'yanov E.A.* On mappings in the Orlicz-Sobolev classes // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – **3(LXI)**, no. 1. – P. 67–78.
- [15] *Koronel J.D.* Continuity and k -th order differentiability in Orlicz-Sobolev spaces: $W^k L_A$ // Israel J. Math. – 1976. – **24**, no. 2. – P. 119–138.
- [16] *Kauhanen J., Koskela P., Maly J.* On functions with derivatives in a Lorentz space // Manuscripta Math. – 1999. – **10**. – P. 87–101.

- [17] *Khruslov E.Ya., Pankratov L.S.* Homogenization of the Dirichlet variational problems in Sobolev-Orlicz spaces. – Operator theory and its applications (Winuipeg, MB, 1998), 345-366, Fields Inst. Commun., 25, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [18] *Landes R., Mustonen V.* Pseudo-monotone mappings in Sobolev-Orlicz spaces and nonlinear boundary value problems on unbounded domains // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – **88**. – P. 25–36.
- [19] *Lappalainen V. and Lehtonen A.* Embedding of Orlicz-Sobolev spaces in Hölder spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1989. – **14**, no. 1. – P. 41–46.
- [20] *Onninen J.* Differentiability of monotone Sobolev functions // Real. Anal. Exchange. – 2000/2001. – **26**, no. 2. – P. 761–772.
- [21] *Tuominen H.* Characterization of Orlicz-Sobolev space // Ark. Mat. – 2007. – **45**, no. 1. – P. 123–139.
- [22] *Vuillermot P.A.* Hölder-regularity for the solutions of strongly nonlinear eigenvalue problems on Orlicz-Sobolev space // Houston J. Math. – 1987. – **13**. – P. 281–287.
- [23] *Väisälä J.* Two new characterizations for quasiconformality // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. – 1965. – **362**. – P. 1–12.
- [24] *Menchoff D.* Sur les differentielles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – **105**. – P. 75–85.
- [25] *Gehring F.W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – **272**. – P. 3–8.
- [26] *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. – Springer-Verlag, New York, 1973.
- [27] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics. – Springer, New York etc., 2009. – 367 p.

- [28] *Martio O., Rickman S., and Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1969. – **448**. – P. 1–40.
- [29] *Gehring F.W.* Quasiconformal mappings in Complex Analysis and its Applications, V. 2, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1976.
- [30] *Hesse J.* A p -extremal length and p -capacity equality // Arc. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131–144.
- [31] *Shlyk V.A.* О равенстве p -емкости и p -модуля // Сиб. матем. ж. – 1993. – **34**, № 6. – С. 216–221.
- [32] *V. Maz'ya, Lectures on isoperimetric and isocapacitary inequalities in the theory of Sobolev spaces.* Contemp. Math., **338** (2003), 307–340.
- [33] *Кругликов В.И.* Ёмкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Матем. сб. – 1986. – **130**, № 2. – С. 185–206.
- [34] *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – **103**. – P. 353–393.
- [35] *H. Federer, Geometric Measure Theory*, Springer, Berlin etc., 1969.
- [36] *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – **98**. – P. 171–219.
- [37] *Rado T., Reichelderfer P.V.* Continuous Transformations in Analysis. – Springer–Verlag, Berlin, 1955. – 441 p.
- [38] *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – Наука, Москва, 1987. – 760 с.
- [39] *Golberg A., Salimov R.* Topological mappings of integrally bounded p -moduli // Ann. Univ. Bucharest, Ser. Math. – 2012. – **3 (LXI)**, № 1. – P. 49–66.
- [40] *Hesse J.* A p -extremal length and p -capacity equality // Ark. Mat. – 1975. – **13**. – P. 131–144.

- [41] *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних Q -гомеоморфизмов // Укр. мат. вісник. – 2008. – **5**, № 2. – С. 157–181.
- [42] *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Наука, Новосибирск, 1982.
- [43] *Ziemer W.P.* Extremal length and p -capacity. // The Michigan Mathematical Journal 16 (1969), no. 1, 43–51.

Салимов Руслан Радикович

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

ул. Розы Люксембург 74, Донецк, 83114.

Рабочий телефон: 311-01-45

Email: salimov07@rambler.ru, ruslan623@yandex.ru,